[redacted]

Intitulé de l'épreuve : Mathématiques

Nombre de copies : 3 copies

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles dans le bon sens.

Exercice 1

1 C

2 C

3 $\frac{1}{160}\times(6\times28+16\times36+15\times42+8\times57+45\times24+34\times33+27\times46+9\times54)$

4 B

5 C (9,66 fois plus)

6 C (17/160 > 10%)

7 D $(17+51)/160 = 68/160 \simeq 40\%$

8 C

Exercice 2

I] 1/ $80 \equiv 2 \ [26]$ car $80 = 26\times3+2$

2/ Pour v, $x = 21$

$x' \equiv 21\times9 + 2 \ [26]$

$\equiv 203 \ [26]$

$\equiv 192 + 11 \ [26]$

$x' = 11$ car 192 multiple de 26

on aurait $\boxed{x' = 9}$ pour obtenir $\boxed{J}$

[redacted]

3/ $x \equiv 3x' + 20 \ [26]$

Pour R , $x' = 17$

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 3 \times 17 + 20 \ [26] \\
&\equiv 71 \quad [26] \\
&\equiv 52 + 19 \quad [26] \\
x &= 19
\end{aligned}
$$

car 52 multiple de 26

Pour $x = 19$, la lettre décodée est $\boxed{T}$

II] 1. Un nombre premier est un nombre qui n'admet que 1 et lui même en tant que diviseurs.

2. PGCD Plus Grand Commun Diviseur
C'est le plus grand diviseur commun à deux entiers.
(Il s'obtient en multipliant les diviseurs commun dans la décomposition en facteur premiers)

3. Vérifions que 38903 est solution de $5015 \times d \equiv 1 \ [57996]$

$5015 \times 50\,903$ modulo $57996 = 1$ par calcul explicite

[redacted]

4. "Asic" est codé par 09120

$$C(\text{"Asic"}) \equiv 09120^{5015} \, [58517] \quad \text{par definition de } C$$
$$\equiv 36974$$

Le mot "Asic" est donc chiffré par 36974.

5. Pour déchiffrer on utilise l'inverse de C

$$D(36974) \equiv 36974^{38903} \, [58517]$$

Le calcul redonne 09120.

Exercice 3

1. u_n est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 500 \\ u_{n+1} = 0,95\, u_n \qquad \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

u_n est donc une suite géométrique de premier terme 500 et de raison q = 0,95

2. Le n^{ieme} terme de cette suite géométrique est

$$u_n = u \cdot q^n$$

$$\boxed{u_n = 500 \times 0,95^n}$$

3.

~~def Seuil(k):~~
~~n = 0~~
~~u = 500~~
~~while n > k~~
~~n = n+1~~
~~u = 0,95 × u~~
~~return n~~

(Enoncé mal lu)

4. ~~La fonction produit le terme n de la serie~~
~~on a donc $u_{200} = 18$~~

3.

```
def Seuil(k)
    n = 0
    u = 500
    while u ⩾ k,            (>= en python)
        n = n+1
        u = 0,95 × u
    return n.
```

4. La fonction renvoie le premier terme tq $u_n < 200$

Le prix des Ecran 27" passera sous 200 € dans 18 mois.

N° 4/12

Intitulé de l'épreuve : Mathématiques

Nombre de copies : 3 copies

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles dans le bon sens.

5 - On peut retrouver ce résultat en résolvant :

$$u_n < 200$$

$$\Leftrightarrow \quad u_0\, q^n < 200$$

$$\Leftrightarrow \quad q^n < \frac{200}{500}$$

$$\Leftrightarrow \quad n \ln q < \ln\left(\frac{200}{500}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \ln\left(\frac{200}{500}\right) / \ln(q)$$ car $\ln(q) < 0$ car $q < 1$

$$\Leftrightarrow \quad n > \ln\left(\frac{2}{5}\right) / \ln(0{,}95)$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \ln(-0{,}55)$$ nombre négatif ??

6 - On sait que étant de raison < 1

u_n est monotone décroissante

u_n converge vers 0

Courbe H en rouge

[redacted]

[redacted]

[redacted]

Intitulé de l'épreuve : Mathématiques

Nombre de copies : 3 copies

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles dans le bon sens.

Exercice 4

I] 1°/ La variable normale X est centrée sur $\boxed{\mu = 650}$

De plus, 0,1587 est la probabilité d'être égal ou inférieure à $\mu - \sigma$, on a donc $\mu - \sigma = 649$

$\sigma = \mu - 649 = 1$

$\boxed{\sigma = 1}$

$$P[649 \leq X \leq 651] = P[\mu-\sigma < X < \mu+\sigma]$$
$$= 1 - P[X < \mu-\sigma] - P[X > \mu+\sigma]$$
$$= 1 - 2 \times 0,1587$$
$$= 0,683$$

$\boxed{\text{Réponse B}}$

2°/ $\mu = 650$ espérance de X

$\sigma = 1$ écart-type de X

$$P[X \leq 651] = P[X \leq \mu+\sigma]$$
$$= 1 - P[X > \mu+\sigma]$$
$$= 1 - 0,1587$$
$$= 0,8413$$

[redacted]

II] Nombre moyen de mots

Y loi normale $\mu = 824$ $\sigma = 13$

1. $P[800 \leq Y \leq 830]$

$= P[\mu - 24 \leq Y \leq \mu + 6]$

$= P[\mu - \frac{24}{13}\sigma \leq Y \leq \mu + \frac{6}{13}\sigma]$

$= 1 - P[-\frac{24}{13} > Z] - P[\frac{6}{13} < Z]$ où Z normale centrée réduite

$= 1 - P[\frac{24}{13} < Z] - P[\frac{6}{13} < Z]$

Nous allons chercher les valeurs dans la table

Approximativement

$P[800 \leq Y \leq 830] = 1 - 3\% - 40\%$ respectivement deux σ et $1/2\,\sigma$

$\simeq 57\%$

2. $P[Y \leq 800] = P[Y \leq \mu - 24]$

$= P[Y \leq \mu - \frac{24}{13}\sigma]$

$= P[Z \leq -\frac{24}{13}]$ où Z normale centrée réduite

Approximativement

$P[Y \leq 800] \simeq 15\%$ une standard deviation.

[redacted]

III] $ch(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

1°/ exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$
donc e^{x} et e^{-x} sont définies sur $\mathbb{R}^+$
le dénominateur est une constante
donc le rapport est bien défini sur $\mathbb{R}^+$

2°/ On calcule la dérivée

$$ch'(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

or $e^{x} > 1$ sur $\mathbb{R}^+$
$-1 < -e^{-x} < 0$ sur $\mathbb{R}^+$

donc $1 - 1 < e^{x} - e^{-x}$
on a bien $e^{x} - e^{-x} > 0$
d'où $ch'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^+$

Ce qui justifie ch est croissante sur $\mathbb{R}^+$

3°/ Nombre de message envoyés par simulation

au jour 10 : $f(10) = 0{,}013\ ch(10)$

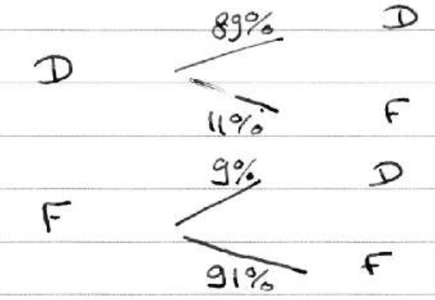
au jour 20 : $f(20) = 0{,}013 \cdot ch(20)$

5°/ Le nombre de message envoyés des jours 9 et 11 domine ceux envoyés les jours 5 et 8.
6°/ Cela est cohérent avec le choix de la fonction ch qui est explosif (essentiellement, on a choisi l'exponentielle)

N°

IV] 1. Graphe Probabiliste

Envoi i est Envoi $i+1$ est



2. on a donc

$$\begin{pmatrix} d_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \Pi \begin{pmatrix} d_n \\ f_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \boxed{\Pi = \begin{pmatrix} 0{,}89 & 0{,}09 \\ 0{,}11 & 0{,}91 \end{pmatrix}}$$

3. $P_2 = \Pi^2 \, P_0$

4.

5. $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{d_{n+1} - 0{,}45}{d_n - 0{,}45} \quad \text{par définition de } a_n$$

$$= \frac{0{,}8\, d_n + 0{,}09 - 0{,}45}{d_n - 0{,}45} \quad \text{par définition de } d_n.$$

$$= \frac{0{,}8\,(d_n - 0{,}45) + \overbrace{0{,}8 \times 0{,}45 + 0{,}09 - 0{,}45}^{=0}}{(d_n - 0{,}45)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0{,}8$$

a_n est donc une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme 0,18

6 le $n^{ième}$ terme de a_n est $a_n = a_0 \times 0{,}8^n$
et par définition de $d_n = a_n + 0{,}45$

$$\boxed{d_n = 0{,}18 \,.\, 0{,}8^n + 0{,}45}$$

7. la raison de la suite a est $q \in [0, 1]$ et $a_0 > 0$
on a donc $a_0 . q^n$ décroissante vers 0

$$\lim_{n \to \infty} d_n = \left(\lim_{n \to \infty} a_n \right) + 0{,}45$$

d_n décroit et sa limite est 0,45

8. Non, la simulation est en désaccord avec la stratégie du MEAE.
A terme, seuls 45% des envois seront des NDI.