Intitulé de l'épreuve : MATHEMATIQUES

Nombre de copies : 2

Numérotez chaque page (dans le cadre en bas de la page) et placez les feuilles dans le bon sens.

Exercice 1 :

Partie A

Demander la valeur de p : $p = 2$

Affecter à u la valeur 5 : $u = 5$

Pour k variant de 1 à p : Pour k variant de 1 à 2

$k = 1$ affecter à u la valeur $0{,}5 \times u + 0{,}5(k-1) - 1{,}5 = 0{,}5 \times 5 + 0{,}5 \times (1-1) - 1{,}5$

$= 2{,}5 + 0{,}5 \times 0 - 1{,}5$

$= 2{,}5 + 0 - 1{,}5$

donc $u = 1$

$k = 2$ affecter à u la valeur $0{,}5 \times u + 0{,}5(k-1) - 1{,}5 = 0{,}5 \times 1 + 0{,}5 \times (2-1) - 1{,}5$

$= 0{,}5 + 0{,}5 - 1{,}5$

$= 1 - 1{,}5$

donc $u = -0{,}5$

Sortie : afficher u : $u = -0{,}5$

On obtient donc en sortie $-0{,}5$.

Partie B :

1- Variables : n et p sont des entiers naturels

u est un réel

Entrée : demander la valeur de p

affecter à u la valeur 5

Traitement : Pour n variant de 1 à p

affecter à u la valeur $0{,}5u + 0{,}5(k-1) - 1{,}5$

afficher n et u côte à côte

fin de pour

[redacted]

2- On ne peut pas affirmer à partir des 4 premiers résultats que la suite (u_n) est décroissante car $u_4 > u_3$. Pour qu'elle soit décroissante, il aurait fallu que $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} < u_n$.

3- si $n=3$ $u_3 = -0{,}75$ et $u_{3+1} = u_4 = -0{,}375$ donc $u_4 > u_3$

Supposons que l'inégalité soit vraie pour $n \geq 3$ alors il faut démontrer qu'elle est vraie pour $n+1$.

$u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 0{,}5\, n - 1{,}5$

Or $u_n = 0{,}5\, u_{n-1} + 0{,}5(n-1) - 1{,}5$

Donc $u_{n+1} - u_n = (0{,}5\, u_n + 0{,}5(n - 1{,}5) - (0{,}5\, u_{n-1} + 0{,}5\,(n-1) - 1{,}5)$

$= 0{,}5\,(u_n - u_{n-1}) + 0{,}5\,(n - (n-1))$

$= 0{,}5\,(u_n - u_{n-1}) + 0{,}5$

Or $u_n > u_{n-1}$ donc $u_n - u_{n-1} > 0$ donc $0{,}5(u_n - u_{n-1}) > 0$.

Donc $0{,}5\,(u_n - u_{n-1}) + 0{,}5 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n \quad \forall n \geq 3$.

$\forall n \geq 3$ $u_{n+1} > u_n$. On peut donc en déduire qu'à partir de $n=3$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

4.

5- v_n est géométrique de raison $0{,}5$ et $v_0 = 0{,}1 u_0 - 0{,}1 \times 0 + 0{,}5 = 0{,}1 \times 5 + 0{,}5 = 1$.

Donc $\forall n$ $v_n = 0{,}5^n$

Or $v_n = 0{,}1\, u_n - 0{,}1\, n + 0{,}5$ donc $0{,}1\, u_n - 0{,}1\, n + 0{,}5 = 0{,}5^n$

$\Leftrightarrow 0{,}1\, u_n = 0{,}5^n + 0{,}1\, n - 0{,}5$

$\Leftrightarrow u_n = 10 \times (0{,}5^n + 0{,}1\, n - 0{,}5)$

$\Leftrightarrow u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5$

N° 2/7

[redacted]

6- $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 10 \times 0{,}5^n + n - 5$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exercice 2 :

1-

	Licenciés	Non licenciés	Total
Spectateurs français	13 125	39 375	52500
Spectateurs étrangers	19 125	3375	22 500
Total	32 250	42 750	75000

70% des spectateurs sont français, soit $75000 \times 0{,}7 = 52\,500$

Il y a donc $75000 - 52500 = 22500$ spectateurs étrangers

85% des spectateurs étrangers sont licenciés soit $22\,500 \times 0{,}85 = 19\,125$

Il y a donc $22500 - 19125 = 3375$ spectateurs étrangers non licenciés

25% des spectateurs français sont licenciés soit $52500 \times 0{,}25 = 13125$

Il y a donc $52\,500 - 13125 = 39\,375$ spectateurs français non licenciés.

2-a- $F \cap L$: le spectateur est français et il est licencié

$P(F \cap L) = \dfrac{13125}{75000} = 0{,}175$

b- $F \cup L$: le spectateur est français ou licencié

$P(F \cup L) = \dfrac{32250 + 39375}{75000} = \dfrac{71625}{75000} = 0{,}045$

3- $p_L(F)$ est la probabilité qu'un spectateur soit français sachant qu'il est licencié

On a donc $p_L(F) = \dfrac{13125}{32250} = 0{,}407$

4. Un non licencié va payer 60 euros
Un licencié va payer $60 \times 0,9 = 54$ euros.
La recette totale est donc de $42\,750 \times 60 + 32\,250 \times 54$
$= 2\,565\,000 + 1\,741\,500$
$= \underline{\underline{4\,306\,500 \text{ euros}}}$

Exercice 3 :

1-a- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} 1 + \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} \times (1 + \ln x) = -\infty$.

donc $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty}}$

b- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$ n'est pas déterminable directement.

On pose $X = \frac{1}{x}$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. En effet :

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car $\forall x \geq 1$ $\quad 0 \leq \frac{1 + \ln(x)}{x^2} \leq \frac{\ln x}{x}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 + \ln(x)}{x^2} = 0}}$.

c- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc $y = 0$ est une asymptote de $\mathcal{C}$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ donc $x = 0$ est une asymptote de $\mathcal{C}$.

2-a- Soit u et v deux fonctions alors $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

On pose $u(x) = 1 + \ln x$ alors $u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = x^2$ donc $v'(x) = 2x$

On a donc $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - (1 + \ln x) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{x - (1 + \ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 - 2\ln x)}{x^4}$

donc $\underline{\underline{f'(x) = \frac{1 - 2 - 2\ln x}{x^3} = \frac{-1 - 2\ln(x)}{x^3}}}$

b- $-1 - 2\ln x \geq 0 \iff 2\ln x < -1$
$\iff \ln x < -\frac{1}{2}$

N°

4.17.

$\Leftrightarrow \quad x < e^{-\frac{1}{2}}$

Sur $]0,+\infty[$, l'inéquation $-1-2\ln x \geq 0$ a pour solution $]0, e^{-\frac{1}{2}}[$.

$\forall x \in]0,+\infty[\quad x^3 > 0$ donc $f'(x) = \dfrac{-1-2\ln x}{x^3} > 0$ sur $]0, e^{-\frac{1}{2}}[$

$f'(x) = 0$ pour $x = e^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) < 0$ sur $]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$.

c. Le tableau de variations de f est donc

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(e^{-\frac{1}{2}})$	$\searrow$	0

3-a. Sur l'intervalle $]0, e^{-\frac{1}{2}}[$, $f(x)$ est continue et strictement croissante. De plus :

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $f(e^{-\frac{1}{2}}) = \dfrac{1+\ln(e^{-\frac{1}{2}})}{(e^{-\frac{1}{2}})^2} = \dfrac{1-1/2}{(e^{-\frac{1}{2}})^2} = \dfrac{1/2}{(e^{-1/2})^2} > 0$ car $1/2 > 0$ et $(e^{-1/2})^2 > 0$. Donc la courbe $\mathcal{C}$ a un point d'intersection avec l'axe les abscisses sur $]0, e^{-1/2}[$.

$\forall x \geq e^{-1/2}$ $f(x) > 0$ donc la courbe $\mathcal{C}$ n'a pas de point d'intersection avec l'axe des abscisses sur $[e^{-1/2}, +\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}$ a donc un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses sur $]0,+\infty[= \mathbb{R}^{+*}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

$f(\frac{1}{e}) = \dfrac{1+\ln(1/e)}{(1/e)^2} = \dfrac{1-\ln e}{(1/e)^2} = \dfrac{1-1}{(1/e)^2} = 0$.

Les coordonnées du point d'intersection sont donc $\left(\frac{1}{e}; 0\right)$

[redacted]

b- On a déduit facilement que $f(x)$ est négative sur $]0, \frac{1}{e}[$

s'annule en $x = \frac{1}{e}$

est strictement positive sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$.

Puisque d'après les questions précédentes $f(x)$ est continue et croissante sur $]0, e^{-1/2}[$, s'annule en $x = 1/e$ et est strictement positive sur $]e^{-1/2}, +\infty[$ avec $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

<u>Exercice 4:</u>

1.a- $2iz + 3z = 5 - 2i$

on pose $z = a + ib$ donc $2i(a+ib) + 3(a+ib) = 5 - 2i$

$$2ia + 2bi^2 + 3a + 3ib = 5 - 2i.$$

$$2ia - 2b + 3a + 3ib = 5 - 2i$$

$$(3a - 2b) + i(2a + 3b) = 5 - 2i$$

donc $\begin{cases} 3a - 2b = 5 \\ 2a + 3b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a - 6b = 15 \\ 4a + 6b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow 13a = 11 \Leftrightarrow a = \frac{11}{13}$

$3a - 2b = 5 \Leftrightarrow 3 \times \frac{11}{13} - 2b = 5 \Leftrightarrow \frac{33}{13} - 5 = 2b \Leftrightarrow \frac{33 - 65}{13} = 2b$

$$\Leftrightarrow -\frac{32}{13} = 2b \Leftrightarrow b = -\frac{32}{26}.$$

Donc $z = \frac{11}{13} + \left(-\frac{32}{26}\right)i = \underline{\underline{\frac{11}{13} - \frac{32}{26}i}}$

b- $1 - 2z = 3iz + 5 - i \Leftrightarrow -2z - 3iz = 4 - i$

$$\Leftrightarrow 2z + 3iz = i - 4$$

on pose $z = a + ib$ donc $2(a+ib) + 3i(a+ib) = i - 4$

$$\Leftrightarrow 2a + 2ib + 3ia - 3b = i - 4$$

$$\Leftrightarrow 2a - 3b + i(2b + 3a) = i - 4$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 3b = -4 \\ 2b + 3a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 6b = -8 \\ 9a + 6b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13a = -5 \\ 2a - 3b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5/13. \\ 2a - 3b = -4 \end{cases}$

donc $2 \times \left(-\frac{5}{13}\right) - 3b = -4 \Leftrightarrow -\frac{10}{13} + 4 = 3b \Leftrightarrow \frac{-10 + 52}{13} = 3b$

$$\Leftrightarrow 3b = \frac{42}{13} \Leftrightarrow b = \frac{42}{39}$$

Donc $\underline{\underline{z = -\frac{5}{13} + \frac{42}{39}i}}$

N°

[redacted]

2a- $z_B - z_A = \left(-\frac{1}{3} - 2i\right) - (1 + 2i) = -\frac{1}{3} - 2i - 1 - 2i = -\frac{1}{3} - \frac{3}{3} - 4i = -\frac{4}{3} - 4i = -4 \times \left(\frac{1}{3} + i\right)$

$z_C - z_A = \left(\frac{8}{3} + 7i\right) - (1 + 2i) = \frac{8}{3} + 7i - 1 - 2i = \frac{8}{3} - \frac{3}{3} + 7i - 2i = \frac{5}{3} + 5i = 5\left(\frac{1}{3} + i\right)$

Donc $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-4(1/3 + i)}{5(1/3 + i)} = \underline{\underline{-\frac{4}{5}}}$

b- $z_B - z_A$ sont les coordonnées de $\vec{AB}$ dans le plan complexe.
$z_C - z_A$ sont les coordonnées de $\vec{AC}$ dans le plan complexe.
Donc $\vec{AB} = -\frac{4}{5}\vec{AC}$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ étant colinéaires, <u>les points A, B et C sont alignés</u>.

N° 7.17.